

Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften

Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse

Die Jahrgänge bis 1921 einschließlich erschienen im Verlag von Carl Winter, Universitätsbuchhandlung in Heidelberg, die Jahrgänge 1922—1933 im Verlag Walter de Gruyter & Co. in Berlin, die Jahrgänge 1934—1944 bei der Weiß'schen Universitätsbuchhandlung in Heidelberg. 1945, 1946 und 1947 sind keine Sitzungsberichte erschienen.

Jahrgang 1937.

1. J. L. WILSER. Beziehungen des Flußverlaufes und der Gefällskurve des Neckars zur Schichtenlagerung am Südrand des Odenwaldes. DMark 1.10.
2. E. SALKOWSKI. Die PETERSONSchen Flächen mit konischen Krümmungslinien. DMark 0.75.
3. Studien im Gneisgebirge des Schwarzwaldes. V. O. H. ERDMANNSDÖRFFER. Die „Kalksilikatfelse“ von SCHOLLACH. DMark 0.65.
4. Studien im Gneisgebirge des Schwarzwaldes. VI. R. WAGER. Über Migmatite aus dem südlichen Schwarzwald. DMark 2.—.
5. Studien im Gneisgebirge des Schwarzwaldes. VII. O. H. ERDMANNSDÖRFFER. Die „Kalksilikatfelse“ von URACH. DMark 0.60.
6. M. MÜLLER. Die Annäherung des Integrales zusammengesetzter Funktionen mittels verallgemeinerter RIEMANNScher Summen und Anwendungen. DMark 3.30.

Jahrgang 1938.

1. K. FREUDENBERG und O. WESTPHAL. Über die gruppenspezifische Substanz A (Untersuchungen über die Blutgruppe A des Menschen). DMark 1.20.
2. Studien im Gneisgebirge des Schwarzwaldes. VIII. O. H. ERDMANNSDÖRFFER. Gneise im Linachtal. DMark 1.—.
3. J. D. ACHELIS. Die Ernährungsphysiologie des 17. Jahrhunderts. DMark 0.60.
4. Studien im Gneisgebirge des Schwarzwaldes. IX. R. WAGER. Über die Kinzigitgneise von Schenkenszell und die Syenite vom Typ Erzenbach. DMark 2.50.
5. Studien im Gneisgebirge des Schwarzwaldes. X. R. WAGER. Zur Kenntnis der Schapbachgneise, Primärtrümer und Granulite. DMark 1.75.
6. E. HOEN und K. APPEL. Der Einfluß der Überventilation auf die willkürliche Apnoe. DMark 0.80.
7. Beiträge zur Geologie und Paläontologie des Tertiärs und des Diluviums in der Umgebung von Heidelberg. Heft 3: F. HELLER. Die Bärenzähne aus den Ablagerungen der ehemaligen Neckarschlinge bei Eberbach im Odenwald. DMark 2.25.
8. K. GOERTTLER. Die Differenzierungsbreite tierischer Gewebe im Lichte neuer experimenteller Untersuchungen. DMark 1.40.
9. J. D. ACHELIS. Über die Syphilisschriften Theophrasts von Hohenheim. I. Die Pathologie der Syphilis. Mit einem Anhang; Zur Frage der Echtheit des dritten Buches der Großen Wundarznei. DMark 1.—.
10. E. MARX. Die Entwicklung der Reflexlehre seit Albrecht von Haller bis in die zweite Hälfte des 19. Jahrhunderts. Mit einem Geleitwort von Viktor v. Weizsäcker. DMark 3.20.

Jahrgang 1939.

1. A. SEYBOLD und K. EGLE. Untersuchungen über Chlorophylle. DMark 1.10.
2. E. RODENWALDT. Frühzeitige Erkennung und Bekämpfung der Heeresseuchen. DMark 0.70.
3. K. GOERTTLER. Der Bau der Muscularis mucosae des Magens. DMark 0.60.
4. I. HAUSSER. Ultrakurzwellen. Physik, Technik und Anwendungsgebiete. DMark 1.70.

Sitzungsberichte
der Heidelberger Akademie der Wissenschaften
Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse
===== Jahrgang 1950, 4. Abhandlung =====

Die semilinearen Abbildungen

Von

W. Graeb
Heidelberg

Mit 25 Textabbildungen

Vorgelegt in der Sitzung vom 5. November 1949



Heidelberg 1950
Springer-Verlag

ISBN-13: 978-3-540-01499-7 e-ISBN-13: 978-3-642-99828-7
DOI: 10.1007/978-3-642-99828-7

**Alle Rechte, insbesondere das der Übersetzung in fremde Sprachen,
vorbehalten.**

Copyright 1950 by Springer-Verlag OHG. in Berlin, Göttingen and Heidelberg.

Die semilinearen Abbildungen.

Von

W. Graeb, Heidelberg.

Mit 25 Textabbildungen.

Inhaltsübersicht.

Einleitung	3
§ 1. Definition und Gruppeneigenschaft der semilinearen Abbildungen	4
§ 2. Flächentopologie	5
§ 3. Simpliziale Komplexe im \mathfrak{R}^n	8
§ 4. Elementarflächenstücke im \mathfrak{R}^3	15
§ 5. Die 2-Sphäre im \mathfrak{R}^3	19
§ 6. Hüllfläche	25
§ 7. Kombinatorische Deformation von Streckenzügen	32
§ 8. Elementarflächenstücke mit Selbstdurchdringung	43
§ 9. Isotope Deformation von topologischen Selbstabbildungen der Ebene	60

Einleitung.

Es werden geradlinige Komplexe im n -dimensionalen euklidischen Raum \mathfrak{R}^n betrachtet, also Punktmengen, die sich in euklidische Simplexe zerlegen lassen, und es werden als simpliziale Zerlegungen nur solche in euklidische Simplexe zugelassen. Eine topologische Abbildung eines Komplexes \mathfrak{R} auf einen Komplex \mathfrak{R}' heißt *semilinear* oder eine *s-Abbildung*, wenn es simpliziale Zerlegungen K bzw. K' von \mathfrak{R} bzw. \mathfrak{R}' gibt, derart, daß jedes Simplex von K affin auf eines von K' abgebildet wird.

Nach ALEXANDER gibt es zu einer aus euklidischen Simplexen bestehenden 2-Sphäre \mathfrak{S}^2 des \mathfrak{R}^3 eine topologische Abbildung des \mathfrak{R}^3 auf sich, welche \mathfrak{S}^2 in den Rand eines Tetraeders überführt¹. In § 5 der Arbeit wird darüber hinaus gezeigt, daß sich jede solche 2-Sphäre sogar durch eine s-Abbildung des \mathfrak{R}^3 auf sich in den Rand eines Tetraeders überführen läßt. Die dazu benötigten Sätze und Hilfssätze werden in den §§ 3, 4 und 6 bereitgestellt.

¹ On the subdivision of 3-Space by a polyhedron. Proc. Nat. Acad. Sci. USA. Bd. 10 (1924) S. 6—8.

Zwei Knotenlinien im dreidimensionalen euklidischen Raum heißen nach REIDEMEISTER kombinatorisch isotop, wenn man sie durch endlich viele kombinatorische Deformationen ineinander überführen kann. In § 7 wird bewiesen, daß zwei Knotenlinien des \mathfrak{R}^3 genau dann kombinatorisch isotop sind, wenn man sie durch eine orientierungserhaltende s -Abbildung des \mathfrak{R}^3 ineinander überführen kann.

In § 8 werden Elementarflächenstücke betrachtet, die sich längs eines 1-Elementes selbst durchdringen, und es wird ein vollständiges Invariantensystem dieser Elementarflächenstücke gegen orientierungserhaltende s -Abbildungen des \mathfrak{R}^3 aufgestellt.

§ 9 ist von den vorhergehenden Paragraphen unabhängig; es wird gezeigt, daß sich jede topologische Selbstabbildung der Ebene durch eine isotope Deformation in eine s -Abbildung überführen läßt.

§ 1. Definition und Gruppeneigenschaft der semilinearen Abbildungen.

Unter einem *Komplex* verstehen wir im folgenden immer eine Punktmenge des Zahlenraumes \mathfrak{R}^n , die einer simplizialen Zerlegung in *euklidische* Simplexe fähig ist. Komplexe werden mit deutschen Buchstaben bezeichnet. Ein *simplizialer Komplex* ist ein Komplex mit einer bestimmten simplizialen Zerlegung in euklidische Simplexe. Simpliziale Komplexe bezeichnen wir mit lateinischen Buchstaben. Simpliziale Zerlegungen sind immer solche in *euklidische* Simplexe.

Sind K und K_1 simpliziale Zerlegungen des Komplexes \mathfrak{K} von der Art, daß jedes Simplex von K_1 einem solchen von K angehört, so heißt K_1 eine *Unterteilung* von K . Je zwei simpliziale Zerlegungen eines Komplexes haben eine gemeinsame Unterteilung¹.

Es seien \mathfrak{K} und \mathfrak{K}_1 zwei Komplexe und φ eine topologische Abbildung von \mathfrak{K} auf \mathfrak{K}_1 . φ heißt *semilinear*, wenn es simpliziale Zerlegungen K und K_1 von \mathfrak{K} und \mathfrak{K}_1 gibt, welche mittels φ *simplizial* aufeinander abgebildet werden, d. h. so, daß jedes Simplex von K affin auf eines von K_1 abgebildet wird. Für semilineare Abbildung sagen wir auch kurz *s-Abbildung*.

Die identische Abbildung ist eine s -Abbildung von \mathfrak{K} auf sich. Ist φ eine s -Abbildung von \mathfrak{K} auf \mathfrak{K}_1 , so ist φ^{-1} eine s -Abbildung von \mathfrak{K}_1 auf \mathfrak{K} . Ist weiter ψ eine s -Abbildung von \mathfrak{K}_1 auf \mathfrak{K}_2 , so ist $\psi\varphi$ eine s -Abbildung von \mathfrak{K} auf \mathfrak{K}_2 . Denn wird bei φ die simpliziale Zerlegung K von \mathfrak{K} auf die simpliziale Zerlegung K_1 von \mathfrak{K}_1 und

¹ Beweis: Siehe ALEXANDROFF-HOPF [1] S. 141, Satz VI.

bei ψ die Zerlegung K'_1 von \mathfrak{R}_1 auf die Zerlegung K_2 von \mathfrak{R}_2 simplizial abgebildet, so betrachte man eine gemeinsame Unterteilung K''_1 von K_1 und K'_1 . Ihr entspricht vermöge φ^{-1} eine simpliziale Zerlegung K'' von \mathfrak{R} und vermöge ψ eine simpliziale Zerlegung K''_2 von \mathfrak{R}_2 . K'' wird dann mittels $\psi \varphi$ simplizial auf K''_2 abgebildet.

Wir nennen die Komplexe \mathfrak{R} und \mathfrak{R}_1 *s-äquivalent*, wenn \mathfrak{R} eine s-Abbildung auf \mathfrak{R}_1 gestattet. Diese Beziehung ist in der Tat eine Äquivalenzrelation, da sie, wie soeben gezeigt, reflexiv, symmetrisch und transitiv ist. Insbesondere folgt, daß die s-Abbildungen eines Komplexes auf sich eine Gruppe bilden.

Beispiel I. Ist eine semilineare Selbstabbildung des Randes eines Dreiecks gegeben, so kann man diese zu einer semilinearen Selbstabbildung des ganzen Dreiecks erweitern. Man halte den Schwerpunkt M des Dreiecks fest und bilde die von M nach den Randpunkten führenden Strecken affin aufeinander ab.

Beispiel II. e_1 und e_2 seien zwei ähnlich gelegene Dreiecke mit demselben Mittelpunkt M und e_2 liege ganz im Innern von e_1 . Dann kann man eine gegebene s-Abbildung des Randes von e_1 auf sich zu einer s-Abbildung des abgeschlossenen Ringgebietes $\overline{e_1 - e_2}$ auf sich ergänzen.

§ 2. Flächentopologie.

Eine *endliche Fläche* des \mathfrak{R}^3 ist ein endlicher, zweidimensionaler, zusammenhängender Komplex des \mathfrak{R}^3 , der eine simpliziale Zerlegung mit folgenden Eigenschaften gestattet:

1. Jedes 1-Simplex ist mit einem oder mit zwei 2-Simplexen inzident. 2. Die mit einem 0-Simplex inzidenten 1- und 2-Simplexe lassen sich in eine einzige Folge anordnen, in der je zwei benachbarte inzident sind.

Die Fläche heißt *geschlossen*, wenn in einer (und damit in jeder beliebigen) simplizialen Zerlegung jedes 1-Simplex mit genau zwei 2-Simplexen inzident ist, andernfalls *berandet*. Der Hauptsatz der Flächentopologie besagt, daß zwei Flächen dann und nur dann topologisch aufeinander abbildbar sind, wenn sie in Charakteristik, Ränderzahl und Orientierbarkeitscharakter übereinstimmen. Dieser Satz gilt auch dann noch, wenn man „topologisch abbildbar“ durch „semilinear abbildbar“ ersetzt. Der Beweis des Hauptsatzes für semilineare Abbildungen unterscheidet sich nur unwesentlich von dem für topologische Abbildungen¹ und kann hier übergangen werden.

¹ Vgl. SEIFERT-THRELFALL [4] S. 130ff.

Wir haben nur orientierbare Flächen zu betrachten. Die allgemeinste orientierbare Fläche läßt sich bekanntlich darstellen als Kugel mit $h(\geq 0)$ -Henkeln und $r(\geq 0)$ -Löchern; h heißt das *Geschlecht* der Fläche. Die Charakteristik N drückt sich durch Geschlecht und Ränderzahl folgendermaßen aus:

$$N = 2(h - 1) + r. \quad (1)$$

Die Charakteristik einer orientierbaren Fläche ist also nie kleiner als -2 . Mit Hilfe von (1) sind wir in der Lage, alle orientierbaren Flächen zu einer gegebenen Charakteristik aufzuzählen. Für $N = -2$ hat (1) nur die Lösung $h = 0, r = 0$. Es gibt also (bis auf s -Äquivalenz) nur eine Fläche zu dieser Charakteristik, die *2-Sphäre*. Diese ist nach (1) geschlossen. Zum Beispiel ist der Rand eines 3-Simplexes eine 2-Sphäre. Zur Charakteristik -1 gibt es genau eine orientierbare Fläche, das *zweidimensionale Element* oder *Elementarflächenstück* ($h = 0, r = 1$). Zum Beispiel ist ein 2-Simplex ein Elementarflächenstück. Zur Charakteristik 0 gibt es bereits zwei orientierbare Flächen, den *Torus* ($h = 1, r = 0$) und den *Kreisring* ($h = 0, r = 2$).

Unter einer *1-Sphäre* verstehen wir das semilineare Bild des Randes eines Dreiecks. Eine 1-Sphäre, die auf einer Fläche liegt und zu deren Rand punktfremd ist, heißt ein *Rückkehrschnitt* der Fläche. Da sich bei dem Aufschneiden einer Fläche längs eines Rückkehrschnittes die Charakteristik nicht ändert und eine Fläche durch Aufschneiden, wenn überhaupt, dann offenbar nur in zwei Flächen zerfällt, so kommen für die aufgeschnittene 2-Sphäre nur zwei Fälle in Frage. Entweder die Fläche zerfällt nicht; da die einzige Fläche der Charakteristik -2 die (geschlossene) 2-Sphäre ist und durch Aufschneiden berandete Flächen entstehen, scheidet dieser Fall aus. Oder es entstehen zwei Flächen mit je einem Rande und der Charakteristik -1 . Das sind aber nach dem angeführten Hauptsatz zwei Elementarflächenstücke. Die 2-Sphäre zerfällt daher durch einen Rückkehrschnitt in zwei Elementarflächenstücke. Ebenso sieht man, daß ein Elementarflächenstück durch einen Rückkehrschnitt in ein Elementarflächenstück und einen Kreisring zerfällt.

Eine 1-Sphäre in der Zahlenebene schneidet aus dieser ein Elementarflächenstück aus. Denn man kann die 1-Sphäre in ein hinreichend großes Dreieck einschließen und auf dieses (als Elementarflächenstück) das vorangehende Ergebnis anwenden.

Unter einem *1-Element* verstehen wir das semilineare Bild eines 1-Simplexes. Die Bilder der beiden Randpunkte des 1-Simplexes heißen *Randpunkte* des 1-Elementes. Ein 1-Element, das auf einer berandeten Fläche liegt und nur seine beiden Randpunkte mit dem Rande der Fläche gemeinsam hat, heißt *Querschnitt* der berandeten Fläche. Die Charakteristik einer berandeten Fläche wird durch Aufschneiden längs eines Querschnittes um 1 kleiner. Ist die berandete Fläche insbesondere ein *Elementarflächenstück*, so wird die Charakteristik nach dem Aufschneiden längs eines Querschnittes gleich -2 , was nur dadurch möglich ist, daß zwei *Elementarflächenstücke* entstehen.

Nach diesen Vorbereitungen beweisen wir drei Sätze über *s-Abbildungen*.

Satz I. \mathfrak{S}^2 sei eine 2-Sphäre, welche durch einen Rückkehrschnitt \mathfrak{s} in zwei *Elementarflächenstücke* \mathfrak{F}_1 und \mathfrak{F}_2 zerlegt wird. Haben dann $'\mathfrak{s}$, $'\mathfrak{F}_1$ und $'\mathfrak{F}_2$ entsprechende Bedeutung auf einer 2-Sphäre $'\mathfrak{S}^2$, so gibt es eine *s-Abbildung* von \mathfrak{S}^2 auf $'\mathfrak{S}^2$, welche \mathfrak{s} , \mathfrak{F}_1 , \mathfrak{F}_2 auf $'\mathfrak{s}$, $'\mathfrak{F}_1$, $'\mathfrak{F}_2$ abbildet.

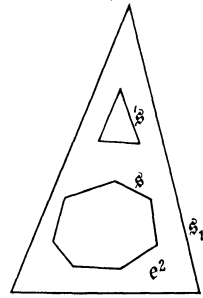


Abb. 1.

Beweis. Es sei φ eine *s-Abbildung* von \mathfrak{s} auf $'\mathfrak{s}$. Man kann φ zu einer *s-Abbildung* von \mathfrak{F}_1 auf $'\mathfrak{F}_1$ und ebenso zu einer von \mathfrak{F}_2 auf $'\mathfrak{F}_2$ erweitern unter Benutzung der Tatsache, daß ein *Elementarflächenstück* semilinear auf ein 2-Simplex abbildbar ist und für dieses die Erweiterungsmöglichkeit in § 1 Beispiel I (S. 5) bewiesen wurde. Damit ist der Satz bewiesen.

Satz II. Es sei \mathfrak{F} ein *Elementarflächenstück*, das durch einen Querschnitt \mathfrak{q} in zwei *Elementarflächenstücke* \mathfrak{F}_1 und \mathfrak{F}_2 zerlegt ist. Haben dann $'\mathfrak{q}$, $'\mathfrak{F}_1$ und $'\mathfrak{F}_2$ entsprechende Bedeutung für ein zweites *Elementarflächenstück* $'\mathfrak{F}$, so gibt es eine *s-Abbildung* von \mathfrak{F} auf $'\mathfrak{F}$, welche \mathfrak{q} , \mathfrak{F}_1 , \mathfrak{F}_2 in $'\mathfrak{q}$, $'\mathfrak{F}_1$, $'\mathfrak{F}_2$ überführt. Der Beweis verläuft analog zu dem von Satz I.

Satz III. Eine 1-Sphäre \mathfrak{s} der Zahlenebene ist durch eine *s-Abbildung* der Zahlenebene auf sich in den Rand eines 2-Simplexes überführbar.

Beweis. Wir schließen \mathfrak{s} in ein 2-Simplex \mathfrak{e}^2 mit dem Rande \mathfrak{s}_1 ein und verstehen unter $'\mathfrak{s}$ den Rand eines im Innern von \mathfrak{e}^2 liegenden zu \mathfrak{e}^2 ähnlich gelegenen 2-Simplexes (Abb. 1). Nach dem Hauptsatze der Flächentopologie läßt sich der von \mathfrak{s}_1 und \mathfrak{s} berandete Kreisring semilinear auf den von \mathfrak{s}_1 und $'\mathfrak{s}$ berandeten abbilden. Dabei kann \mathfrak{s}_1 zunächst irgendwie semilinear auf sich abgebildet

worden sein. Durch eine anschließende semilineare Selbstabbildung des von \mathfrak{s}_1 un d' \mathfrak{s} berandeten Kreisringes kann man nach § 1 Beispiel II (S. 5) erreichen, daß \mathfrak{s}_1 punktweise festbleibt. Ferner gibt es nach dem Hauptsatz der Flächentopologie eine s -Abbildung des abgeschlossenen Innern von \mathfrak{s} auf das von \mathfrak{s}' ; nach § 1 Beispiel I (S. 5) können wir diese s -Abbildung so wählen, daß sie auf \mathfrak{s} mit der soeben konstruierten s -Abbildung der beiden Kreisringe aufeinander übereinstimmt. Damit haben wir eine s -Abbildung des abgeschlossenen Innern von \mathfrak{s}_1 auf sich, welche \mathfrak{s} in \mathfrak{s}' überführt und auf \mathfrak{s}_1 die Identität ist. Diese können wir zu einer s -Abbildung der ganzen Ebene auf sich erweitern, indem wir alle Punkte des Äußeren von \mathfrak{s}_1 festlassen. Damit ist Satz III bewiesen.

§ 3. Simpliziale Komplexe im \mathfrak{R}^n .

Es sei K ein simplizialer Komplex des \mathfrak{R}^n und \mathfrak{R} die Menge der Punkte, die auf den Simplex von K liegen.

Unter einer *simplizialen Deformation* $\{\psi_t\}$ des simplizialen Komplexes K verstehen wir eine Schar von simplizialen Abbildungen $\psi_t (0 \leq t \leq 1)$ von K in den \mathfrak{R}^n , welche folgende Bedingungen erfüllen:

1. ψ_0 ist die Identität.
2. ψ_t ist auf dem topologischen Produkt des Komplexes \mathfrak{R} mit der Strecke $0 \leq t \leq 1$ stetig.

Die Abbildung ψ_t ist durch die Bilder $A_{\mu,t} = \psi_t(A_\mu)$ der Ecken A_μ von K eindeutig bestimmt. Ist die Abbildung ψ_t außerdem für jedes t topologisch (also semilinear), so nennen wir die Deformation $\{\psi_t\}$ *isotop simplizial*. In diesem Falle wird die Bildmenge $\psi_t(\mathfrak{R})$ durch die Bilder der Simplexe von K simplizial zerlegt.

Satz I. *Es sei K ein simplizialer Komplex des \mathfrak{R}^n mit den Ecken $A_1 \dots A_m$ und $\{\psi_t\} (0 \leq t \leq 1)$ eine isotope simpliziale Deformation von K . Dann läßt sich die Endabbildung ψ_1 zu einer s -Abbildung des \mathfrak{R}^n auf sich ergänzen und diese ist außerhalb eines genügend großen n -Simplexes die Identität.*

Dem Beweis schicken wir drei Hilfssätze voraus.

Hilfssatz I. *Es sei φ eine stetige Abbildung eines simplizialen Komplexes K in den \mathfrak{R}^n mit folgenden Eigenschaften:*

(A₁). *Die einzelnen Simplexe von K werden eineindeutig und affin abgebildet.*

(A₂). *Die Bilder punktfremder Simplexe von K sind punktfremd. Dann ist die Abbildung φ eineindeutig.*

Beweis. Nehmen wir entgegen der Behauptung an, es gäbe zwei Punkte P und Q mit demselben Bildpunkt. P und Q sind mittlere Punkte¹ zweier Simplexe \mathfrak{E}^p und \mathfrak{E}^q von K , und die Simplexe \mathfrak{E}^p und \mathfrak{E}^q sind durch P und Q eindeutig bestimmt. Wir nennen P und Q ein ausgezeichnetes Punktepaar und $p+q$ seine Ordnung. Wegen (A_1) ist keines der beiden Simplexe \mathfrak{E}^p und \mathfrak{E}^q Seite des anderen und wegen (A_2) sind sie nicht punktfremd. Sie haben also eine gemeinsame Seite \mathfrak{E}^r ($0 \leq r < p, q$). R sei ein Punkt von \mathfrak{E}^r . Der Durchschnitt der Geraden RP (bzw. RQ) mit dem Simplex \mathfrak{E}^p (bzw. \mathfrak{E}^q) sei die Strecke RP_1 (bzw. RQ_1^*); bildet man diese beiden Geraden affin so aufeinander ab, daß P und Q entsprechende Punkte sind, während R sich selbst zugeordnet ist, so entspricht entweder P_1 einem Punkte Q_1 der Strecke RQ_1^* oder Q_1^* einem Punkte P_1^* der Strecke RP_1 . Es ist keine Einschränkung, das erstere anzunehmen. Dann ist, da φ auf \mathfrak{E}^p und \mathfrak{E}^q affin ist, $\varphi(P_1) = \varphi(Q_1)$.

P_1 ist mittlerer Punkt eines Simplexes \mathfrak{E}^{p_1} , Q_1 mittlerer Punkt eines Simplexes \mathfrak{E}^{q_1} . Dabei ist $p_1 < p$, da \mathfrak{E}^{p_1} Seite von \mathfrak{E}^p ist, und $q_1 \leq q$. Wir haben damit gezeigt, daß es zu jedem ausgezeichneten Punktepaar (P, Q) ein anderes (P_1, Q_1) mit kleinerer Ordnung gibt. Das ist aber unmöglich, da die Ordnungen nicht negativ sein können.

Hilfssatz II. In einer simplizialen Zerlegung Z des \mathbb{R}^n seien endlich viele Ecken $A_1 \dots A_m$ ausgewählt. Dann gibt es eine Zahl $\varepsilon > 0$, so daß die simpliziale Abbildung φ des \mathbb{R}^n , die man erhält, wenn man $A_1 \dots A_m$ um weniger als ε verschiebt, eine topologische Abbildung des \mathbb{R}^n auf sich ist.

Beweis. a) Wir wählen ε so klein, daß φ die Bedingungen des Hilfssatzes I erfüllt; dies läßt sich immer erreichen, da bei φ nur endlich viele Simplexe von Z abgeändert werden. Dann ist φ ein-eindeutig nach Hilfssatz I.

b) Gäbe es einen Punkt P , der nicht Bildpunkt ist, so verbinde man ihn geradlinig mit einem mittleren Punkte Q eines Bild- n -Simplexes. Den Punkt Q kann man dabei so wählen, daß die Strecke PQ punktfremd ist zu den Bildern der $(n-2)$ -Simplexe von Z . Auf PQ gibt es einen ersten Punkt R , welcher Bildpunkt ist. Dieser gehört einem Bild- $(n-1)$ -Simplexe $\mathfrak{E}^{n-1} = \varphi(\mathfrak{E}^{n-1})$ an, und zwar ist er mittlerer Punkt dieses Simplexes. Da die Bilder der beiden mit \mathfrak{E}^{n-1} inzidenten n -Simplexe zu beiden Seiten von \mathfrak{E}^{n-1} liegen (wegen der Eineindeutigkeit von φ), kann R nicht der

¹ Definition s. SEIFERT-THRELFALL [4] S. 38.

erste Bildpunkt auf PQ sein. Aus diesem Widerspruche folgt, daß jeder Punkt des \mathfrak{R}^n Bildpunkt ist.

Hilfssatz III. *Es sei K ein simplizialer Komplex des \mathfrak{R}^n mit den Ecken $A_1 \dots A_m$. Dann gibt es eine Zahl $\varepsilon > 0$, so daß man die simpliziale Abbildung, die man durch Verschieben der Ecken von K um weniger als ε erhält, zu einer s -Abbildung des \mathfrak{R}^n auf sich ergänzen kann.*

Beweis. Unter Zuhilfenahme der linearen Räume, denen die Simplexe von K angehören, läßt sich eine simpliziale Zerlegung Z des \mathfrak{R}^n bilden, so daß eine passende Unterteilung K^* von K aus Simplexen von Z besteht. Die Ecken von Z zerfallen in drei Klassen:

1. Die Ecken A_μ von K , ($\mu = 1 \dots m$).
2. Die Ecken B_\varkappa von K^* , die nicht Ecken von K sind, ($\varkappa = 1 \dots k$).
3. Die übrigen Ecken, die C_λ heißen mögen, ($\lambda = 1, 2 \dots$).

Sind A'_μ ($\mu = 1 \dots m$) m beliebige Punkte des \mathfrak{R}^n , so ist durch die Zuordnung $A_\mu \rightarrow A'_\mu$ eine simpliziale Abbildung φ von K in den \mathfrak{R}^n gegeben. B'_\varkappa sei der Bildpunkt von B_\varkappa . Wir betrachten nun die durch die Zuordnung

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu, \quad B_\varkappa \rightarrow B'_\varkappa, \quad C_\lambda \rightarrow C_\lambda$$

gegebene simpliziale Abbildung φ des \mathfrak{R}^n . Diese ist auf K mit ψ identisch. Liegt A'_μ hinreichend nahe an A_μ (und daher auch B'_\varkappa hinreichend nahe an B_\varkappa), so ist φ nach Hilfssatz II eine topologische Abbildung des \mathfrak{R}^n auf sich.

Beweis von Satz I. Es sei \bar{t} ein beliebiger Punkt der Strecke $0 \leq t \leq 1$. Die Abbildung $\psi_{\bar{t}}$ führt K in einen simplizialen Komplex $K_{\bar{t}}$ mit den Ecken $A_{\mu, \bar{t}}$ ($\mu = 1 \dots m$) über. Ist t irgendein anderer Punkt der Strecke $0 \leq t \leq 1$, so ist $\psi_t \psi_{\bar{t}}^{-1}$ eine simpliziale Abbildung von $K_{\bar{t}}$ auf K_t . Wegen Hilfssatz III gibt es eine Zahl $\delta_{\bar{t}}$, so daß die Abbildung $\psi_t \psi_{\bar{t}}^{-1}$, falls $|t - \bar{t}| < \delta_{\bar{t}}$ ist, zu einer s -Abbildung des \mathfrak{R}^n auf sich ergänzt werden kann. Da \bar{t} ein beliebiger Punkt der Strecke $0 \leq t \leq 1$ war, kann man diese nach dem HEINE-BORELSCHEN Überdeckungssatz mit einer genügend großen Anzahl von Teilpunkten $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = 1$ so belegen, daß jede Abbildung $\psi_{t_{v+1}} \psi_{t_v}^{-1}$ von K_{t_v} auf $K_{t_{v+1}}$ zu einer s -Abbildung des \mathfrak{R}^n auf sich ergänzt werden kann. Diese s -Abbildungen des \mathfrak{R}^n , nacheinander ausgeführt, ergeben eine s -Abbildung des \mathfrak{R}^n auf sich, welche auf K mit ψ_1 übereinstimmt. Da alle Faktorabbildungen außerhalb eines hinreichend großen Simplexes die Identität sind, gilt gleiches von der Produktabbildung. Damit ist Satz I bewiesen.

Beispiel I. Ein 1-Element des \mathfrak{R}^n läßt sich durch eine s -Abbildung des \mathfrak{R}^n auf sich in eine Strecke überführen.

Beweis. Es bezeichne K das 1-Element mit einer solchen simplizialen Zerlegung, daß niemals zwei aufeinanderfolgende 1-Simplexe in einer Geraden liegen; $A_1 \dots A_m$ seien die Ecken von K . Wir wählen auf der von A_2 und A_3 bestimmten Geraden auf einer passenden Seite von A_2 einen Punkt A'_1 so nahe an A_2 , daß das 2-Simplex $(A_1 A_2 A'_1)$ mit K nur die Strecke $A_1 A_2$ zum Durchschnitt hat (Abb. 2). Nun führen wir die Ecke A_1 längs $A_1 A'_1$ in A'_1 über. Dies ist eine isotope simpliziale Deformation von K . Nach Satz I

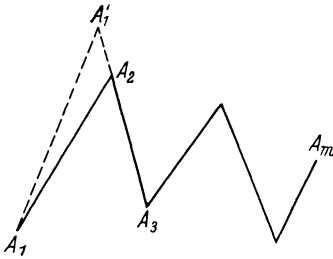


Abb. 2

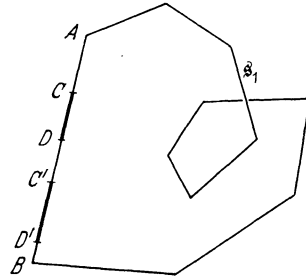


Abb. 3.

(S. 8) gibt es daher eine s -Abbildung des \mathfrak{R}^n , welche K in das 1-Element $K + A_1 A_2 + A'_1 A_2 \pmod{2}$ überführt. Durch $(m - 2)$ -malige Anwendung dieses Verfahrens erhalten wir eine s -Abbildung des \mathfrak{R}^n , die K in eine Strecke überführt.

Beispiel II. Eine 1-Sphäre \mathfrak{s} des \mathfrak{R}^n läßt sich durch eine s -Abbildung des \mathfrak{R}^n auf sich so in sich überführen, daß ein vorgegebenes Stück t in ein vorgegebenes Stück t' übergeht.

Beweis. a) Wir nehmen zunächst an, daß t und t' punktfremd sind. Dann gibt es ein auf \mathfrak{s} liegendes 1-Element u , welches t und t' im Innern enthält. Nach Beispiel I gibt es eine s -Abbildung φ des \mathfrak{R}^n auf sich, welche u in eine Strecke AB überführt. Dabei gehen t und t' in zwei im Innern von AB liegende Strecken CD und $C'D'$ und \mathfrak{s} in eine 1-Sphäre \mathfrak{s}_1 über (Abb. 3). s_1 sei die 1-Sphäre \mathfrak{s}_1 mit einer solchen simplizialen Zerlegung, daß im Innern von AB genau die Ecken C und D liegen. Wir führen nun die Ecken C und D längs CC' bzw. DD' in die Punkte C' und D' über und halten alle anderen Ecken von s_1 fest. Dies ist eine isotope simpliziale Deformation von s_1 . Nach Satz I (S. 8) gibt es daher eine s -Abbildung ψ des \mathfrak{R}^n auf sich, welche \mathfrak{s}_1 in sich und CD in $C'D'$ überführt. Daher ist $\varphi^{-1} \psi \varphi$ die verlangte s -Abbildung.

b) Sind t und t' nicht punktfremd, so gibt es zwei auf \mathfrak{s} liegende, zueinander punktfremde 1-Elemente t_1 und t'_1 , so daß t_1 zu t und t'_1 zu t' punktfremd ist. Nach a) gibt es dann eine s-Abbildung ψ_1 (bzw. ψ'_1) des \mathfrak{R}^n , welche \mathfrak{s} in sich und t in t_1 (bzw. t' in t'_1) überführt. Ferner gibt es, ebenfalls nach a), eine s-Abbildung ψ des \mathfrak{R}^n , welche \mathfrak{s} in sich und t_1 in t'_1 überführt. Dann führt $\psi'^{-1}_1 \psi \psi_1$ die 1-Sphäre \mathfrak{s} in sich und t in t' über.

Beispiel III. Es seien \mathfrak{F}_1 und \mathfrak{F}_2 zwei Elementarflächenstücke des \mathfrak{R}^3 , deren Durchschnitt aus dem gemeinsamen Rand \mathfrak{s} besteht und \mathfrak{R} ein Komplex, dessen Durchschnitt mit $\mathfrak{F}_1 + \mathfrak{F}_2$ aus \mathfrak{s} besteht und der zum Innern der 2-Sphäre $\mathfrak{F}_1 + \mathfrak{F}_2$ fremd ist. Gibt es dann eine s-Abbildung φ des \mathfrak{R}^3 auf sich, welche die 2-Sphäre $\mathfrak{F}_1 + \mathfrak{F}_2$ in den Rand eines 3-Simplexes e^3 überführt¹, so gibt es auch eine s-Abbildung des \mathfrak{R}^3 auf sich, welche \mathfrak{F}_1 in \mathfrak{F}_2 überführt und auf \mathfrak{R} die Identität ist.

Beweis. e^3 habe die Ecken A_0, A_1, A_2, A_3 . Wir können annehmen, daß φ das Flächenstück \mathfrak{F}_2 in die Seite $(A_1 A_2 A_3)$ von e^3 und daher \mathfrak{F}_1 in die anderen drei Seiten von e^3 überführt. Denn nach § 2 Satz I (S. 7) gibt es eine s-Abbildung des Randes von e^3 auf sich, welche $\varphi(\mathfrak{F}_2)$ in $(A_1 A_2 A_3)$ überführt und diese können wir zu einer s-Abbildung des \mathfrak{R}^3 auf sich ergänzen, indem wir die vom Mittelpunkt von e^3 ausgehenden Halbgeraden affin aufeinander abbilden. Z sei eine simpliziale Zerlegung von $\varphi(\mathfrak{R})$; diese erweitern wir zu einer simplizialen Zerlegung von $\varphi(\mathfrak{R} + \mathfrak{F}_1)$, indem wir alle auf dem Rande von $(A_1 A_2 A_3)$ liegenden Ecken von Z durch Kanten mit A_0 verbinden. K_1 sei der simpliziale Komplex, der aus $\varphi(\mathfrak{R} + \mathfrak{F}_1)$ durch diese Zerlegung entsteht. Ist M der Mittelpunkt von $(A_1 A_2 A_3)$, so führen wir die Ecke A_0 längs $A_0 M$ in den Punkt M über und halten alle anderen Ecken von K_1 fest. Da $\varphi(\mathfrak{R})$ zum Innern von e^3 fremd ist, ist dies eine isotope simpliziale Deformation $\{\psi_t\}$ ($0 \leq t \leq 1$) des simplizialen Komplexes K_1 . Die Endabbildung ψ_1 läßt sich nach Satz I (S. 8) zu einer s-Abbildung ψ des \mathfrak{R}^3 auf sich erweitern. Diese führt $\varphi(\mathfrak{F}_1)$ in $\varphi(\mathfrak{F}_2)$ über und ist auf $\varphi(\mathfrak{R})$ die Identität. Daher ist $\varphi^{-1} \psi \varphi$ die verlangte Abbildung.

Beispiel IV. Es sei \mathfrak{F} ein Elementarflächenstück des \mathfrak{R}^3 , das durch einen Querschnitt α in zwei Teile \mathfrak{F}' und \mathfrak{F}'' zerlegt ist. Der Rand von \mathfrak{F} wird entsprechend in zwei 1-Elemente t' und t'' zerlegt. \mathfrak{R} sei ein Komplex, dessen Durchschnitt mit \mathfrak{F} aus t' besteht. Gibt es dann eine s-Abbildung des \mathfrak{R}^3 , die \mathfrak{F} in ein 2-Simplex überführt²,

¹ Wir werden in § 5 zeigen, daß es stets eine solche s-Abbildung gibt.

² Wir werden in § 4 zeigen, daß es stets eine solche s-Abbildung gibt.

so gibt es auch eine s -Abbildung des \mathfrak{R}^3 , die \mathfrak{F} in \mathfrak{F}' überführt und auf \mathfrak{K} die Identität ist.

Beweis. Nach Voraussetzung gibt es eine s -Abbildung φ des \mathfrak{R}^3 , welche \mathfrak{F} in ein 2-Simplex (PQR) überführt. Nach § 1 Beispiel I (S. 5) können wir annehmen, daß dabei das 1-Element t' in die Strecke PQ übergeht. S sei der Mittelpunkt von PQ und O ein mittlerer Punkt der Strecke SR (Abb. 4). Nach § 2 Satz II (S. 7) können wir weiter annehmen, daß die Abbildung φ das Flächenstück \mathfrak{F}' in das 2-Simplex (PQO) überführt.

Der Bildkomplex \mathfrak{K}' von \mathfrak{K} hat mit dem 2-Simplex (PQR) die Seite PQ zum Durchschnitt. z sei eine simpliziale Zerlegung von \mathfrak{K}' . Diese erweitern wir zu einer simplizialen Zerlegung des Komplexes $\mathfrak{K}' + (PQR)$, indem wir alle auf PQ liegenden Ecken von z durch Kanten mit O verbinden. K' sei der simpliziale Komplex, der aus $\mathfrak{K}' + (PQR)$ durch diese Zerlegung entsteht. Nun führen wir den Punkt R längs RO in den Punkt O und gleichzeitig den Punkt O längs OS in den Mittelpunkt der Strecke OS über, während alle anderen Ecken von K' festbleiben. Dies ist eine isotope simpliziale Deformation des simplizialen Komplexes K' . Nach Satz I (S. 8) gibt es daher eine s -Abbildung ψ des \mathfrak{R}^3 , welche $\mathfrak{K}' + (PQR)$ in $\mathfrak{K}' + (PQO)$ überführt und auf \mathfrak{K}' die Identität ist. Dann ist $\varphi^{-1}\psi\varphi$ die verlangte Abbildung.

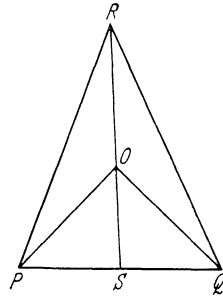


Abb. 4.

Satz II. Sind die beiden Komplexe \mathfrak{K} und \mathfrak{K}' durch eine s -Abbildung φ des \mathfrak{R}^n auf sich mit Erhaltung der Orientierung ineinander überführbar und liegen beide im Innern des Simplexes \mathfrak{C}^n , so gibt es eine s -Abbildung des \mathfrak{R}^n auf sich, welche auf \mathfrak{K} mit φ übereinstimmt und außerhalb \mathfrak{C}^n die Identität ist.

Beweis. a) e^n sei ein Simplex, in welchem die Abbildung φ affin ist und welches samt dem Bildsimplex $\varphi(e^n)$ im Äußern von \mathfrak{C}^n liegt. Wir führen e^n durch eine isotope simpliziale Deformation $\{\psi^t\}$ ($0 \leq t \leq 1$) in $\varphi(e^n)$ über, so daß entsprechende Eckpunkte ineinander übergehen; dies ist möglich, da φ die Orientierung erhält.

Die Deformation werde überdies so vorgenommen, daß die dabei von e^n überstrichene Punktmenge ganz im Äußern von \mathfrak{C}^n liegt. Dann ist $\{\psi_t\}$ gleichzeitig eine isotope simpliziale Deformation des aus den beiden Simplexen \mathfrak{C}^n und e^n bestehenden simplizialen

Komplexes, wenn wir die Ecken von \mathfrak{C}^n festhalten. Die Endabbildung ψ_1 kann nach Satz I (S. 8) zu einer s -Abbildung χ des \mathfrak{R}^n auf sich ergänzt werden. Daher stimmt die Abbildung $\varphi_1 = \chi^{-1}\varphi$ auf \mathfrak{R} mit φ überein und ist in e^n die Identität.

Ferner gibt es eine s -Abbildung ψ des \mathfrak{R}^n auf sich, welche \mathfrak{R} in einen innerhalb e^n liegenden Komplex \mathfrak{R}_1 überführt und außerhalb eines genügend großen Simplexes die Identität ist. Dies folgt z. B. aus Satz I (S. 8), da wir den Komplex \mathfrak{R} ähnlich zusammenziehen können, wobei das Ähnlichkeitszentrum etwa der Mittelpunkt von e^n ist. Die Abbildung $\varphi_2 = \varphi_1\psi^{-1}\varphi_1^{-1}\psi$ ist daher auf dem Komplex \mathfrak{R} mit φ identisch; da ψ außerhalb eines genügend großen Simplexes die Identität ist, gilt gleiches von $\varphi_1\psi^{-1}\varphi_1^{-1}$ und damit von φ_2 .

b) Wir wählen das Simplex $'\mathfrak{C}^n$ so groß, daß es \mathfrak{C}^n im Innern enthält und daß φ_2 außerhalb $'\mathfrak{C}^n$ die Identität ist, was nach a) möglich ist. Z sei eine simpliziale Zerlegung der Vereinigungsmenge $\mathfrak{R} + \mathfrak{R}'$ und L sei der simpliziale Komplex, der aus den Simplexen von Z und den Seitensimplexen von \mathfrak{C}^n besteht. Wir führen nun \mathfrak{C}^n durch eine isotope simpliziale Deformation $\{\psi_t\}$ ($0 \leq t \leq 1$) in $'\mathfrak{C}^n$ über, so daß das Simplex $\psi_t(\mathfrak{C}^n)$ für jedes t ($0 \leq t \leq 1$) die Komplexe \mathfrak{R} und \mathfrak{R}' im Innern enthält, während wir die Ecken von Z festhalten. Dann ist $\{\psi_t\}$ eine isotope simpliziale Deformation des Komplexes L . Die Endabbildung ψ_1 kann nach Satz I (S. 8) zu einer s -Abbildung φ_3 des \mathfrak{R}^n auf sich ergänzt werden. φ_3 führt das Simplex \mathfrak{C}^n in $'\mathfrak{C}^n$ über und ist auf $\mathfrak{R} + \mathfrak{R}'$ die Identität. Daher ist die s -Abbildung $\varphi_3^{-1}\varphi_2\varphi_3$ auf \mathfrak{R} mit φ_2 und damit mit φ identisch und außerhalb \mathfrak{C}^n die Identität.

Satz III. *Es sei \mathfrak{C}^3 der Rand, \mathfrak{C}^3 eine dreidimensionale Seite eines 4-Simplexes, A ein nicht zu \mathfrak{C}^3 gehöriger Punkt von \mathfrak{C}^3 und $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{C}^3$ eine Punktmenge, die fremd zu einer Umgebung von A ist. Dann gibt es eine s -Abbildung von \mathfrak{C}^3 auf sich, so daß \mathfrak{C}^3 ähnlich auf ein 3-Simplex in seinem Innern abgebildet wird und das Bild von \mathfrak{M} im Innern von \mathfrak{C}^3 liegt.*

Beweis. a) Wir betrachten das 4-Simplex, welches durch Projektion von \mathfrak{C}^3 von A aus entsteht; sein Rand sei $'\mathfrak{C}^3$. Durch Projektion von \mathfrak{C}^3 auf $'\mathfrak{C}^3$ vom Mittelpunkte von $'\mathfrak{C}^3$ aus ist eine s -Abbildung φ von \mathfrak{C}^3 auf $'\mathfrak{C}^3$ bestimmt, welche A in sich überführt und auf \mathfrak{C}^3 die Identität ist. α sei die Affinität des \mathfrak{R}^4 , welche die Ecken von \mathfrak{C}^3 festläßt und A in die dem Simplex \mathfrak{C}^3 gegenüberliegende Ecke P von \mathfrak{C}^3 überführt. Dann ist $\alpha\varphi$ eine s -Abbildung von \mathfrak{C}^3 auf sich, welche A in P überführt und auf \mathfrak{C}^3 die Identität ist.

b) Nach a) können wir annehmen, daß die Menge \mathfrak{M} zu einer Umgebung der Ecke P fremd ist. Dann gibt es eine Ähnlichkeitsabbildung β mit dem Zentrum P , so daß $\beta(\mathfrak{E}^3)$ zu \mathfrak{M} fremd ist. B sei der Mittelpunkt des von $\beta(\mathfrak{E}^3)$ berandeten 4-Simplexes und γ die s -Abbildung, welche durch Projektion von \mathfrak{E}^3 auf $\beta(\mathfrak{E}^3)$ von B aus bestimmt ist. Bei der Abbildung γ geht \mathfrak{E}^3 in ein ähnliches Simplex im Innern des Simplexes $\beta(\mathfrak{E}^3)$ und die Menge \mathfrak{M} in eine Menge im Innern von $\beta(\mathfrak{E}^3)$ über. Daher ist $\beta^{-1}\gamma$ die gewünschte s -Abbildung.

Korollar zu Satz III. *Zu einer Punktmenge \mathfrak{M} auf dem Rande \mathfrak{E}^3 eines 4-Simplexes, welche zu einer Umgebung eines Punktes von \mathfrak{E}^3 fremd ist, gibt es eine s -Abbildung φ von \mathfrak{E}^3 auf sich, so daß $\varphi(\mathfrak{M})$ im Innern einer dreidimensionalen Seite von \mathfrak{E}^3 liegt.*

§ 4. Elementarflächenstücke im \mathfrak{R}^3 .

Es sei \mathfrak{F} ein Elementarflächenstück im \mathfrak{R}^3 . Definitionsgemäß ist \mathfrak{F} auf ein 2-Simplex semilinear abbildbar. Wir werden darüber hinaus zeigen, daß es eine s -Abbildung des \mathfrak{R}^3 auf sich gibt, welche \mathfrak{F} in ein 2-Simplex überführt. Dazu beweisen wir zunächst zwei Hilfssätze.

Hilfssatz I. *Es sei F eine aus mindestens zwei Dreiecken bestehende simpliziale Zerlegung eines Elementarflächenstückes \mathfrak{F} . Dann gibt es unter den Dreiecken von F entweder eines, das mit dem Rande von \mathfrak{F} genau eine Seite zum Durchschnitt hat oder eines, das mit dem Rande von \mathfrak{F} genau zwei Seiten zum Durchschnitt hat.*

Beweis. Wir nehmen an, es gäbe kein 2-Simplex, das mit dem Rand von \mathfrak{F} genau eine Seite zum Durchschnitt hat. $A_1 \dots A_p$ seien die auf dem Rande von \mathfrak{F} liegenden Ecken in zyklischer Reihenfolge. Wir betrachten zu jedem 1-Simplexe $A_{v-1}A_v$ ($v = 1 \dots p$, mod p) die dritte Ecke des mit ihm inzidenten (eindeutig bestimmten) 2-Simplexes. Diese gehört nach Voraussetzung dem Rande von \mathfrak{F} an, ist also eine der Ecken $A_1 \dots A_p$, etwa A_{λ_v} ; dabei ist immer $\lambda_v \neq v - 1$ und $\lambda_v \neq v$. λ_1 ist eine der Zahlen $2, 3 \dots p - 1$, also $\lambda_1 > 1$. Es sei ν die größte Zahl, für die $\lambda_\nu > \nu$ ist. Dann ist notwendig $\lambda_\nu = \nu + 1$, d. h. $A_\nu A_{\lambda_\nu}$ ist eine Randkante von \mathfrak{F} und das Dreieck $A_{\nu-1}A_\nu A_{\lambda_\nu}$ hat die Randkanten $A_{\nu-1}A_\nu$ und $A_\nu A_{\lambda_\nu}$ zum Durchschnitt mit dem Rande von \mathfrak{F} . Wäre nämlich $\lambda_\nu > \nu + 1$, so würde \mathfrak{F} durch die Kante $A_\nu A_{\lambda_\nu}$ in zwei Elementarflächenstücke zerlegt, von denen das eine die Ecken $A_\nu, A_{\nu+1} \dots A_{\lambda_\nu}$ hat. Diesem würde dann das Dreieck $A_\nu A_{\nu+1} A_{\lambda_{\nu+1}}$ angehören, d. h. es wäre $\lambda_{\nu+1} > \nu + 1$ im Widerspruch zur Definition von ν .

Hilfssatz II. Ein Simplexstern¹ $\mathfrak{S}t$ des \mathfrak{R}^3 , dessen Außenrand eine 1-Sphäre ist, läßt sich durch eine s -Abbildung des \mathfrak{R}^3 auf sich in ein 2-Simplex überführen.

Beweis. a) O sei der Mittelpunkt des Simplexsternes und e^3 ein 3-Simplex mit dem Mittelpunkte O . Die Projektion des Außenrandes von $\mathfrak{S}t$ auf den Rand \mathfrak{S}^2 von e^3 von O aus ist eine 1-Sphäre \mathfrak{s} . \mathfrak{Q} sei eine Ebene durch O , welche zu einer zweidimensionalen Seite von e^3 parallel ist. Diese schneidet e^3 in einem 2-Simplex e^2 . Nach § 2 Satz I (S. 7) gibt es eine s -Abbildung von \mathfrak{S}^2 auf sich, welche \mathfrak{s} in den Rand von e^2 überführt. Diese ergänzen wir zu einer s -Abbildung des \mathfrak{R}^3 , indem wir die von O nach den Punkten von \mathfrak{S}^2 führenden Halbgeraden affin aufeinander abbilden. Die so erhaltene s -Abbildung führt $\mathfrak{S}t$ in einen ebenen Simplexstern über.

b) Nach a) können wir annehmen, daß $\mathfrak{S}t$ in einer Ebene \mathfrak{Q} liegt. Offenbar gibt es eine s -Abbildung der Ebene \mathfrak{Q} auf sich, welche $\mathfrak{S}t$ in ein 2-Simplex überführt; diese kann man zu einer s -Abbildung des \mathfrak{R}^3 erweitern, indem man die zu \mathfrak{Q} senkrechten Geraden vertauscht.

Satz I. Ein Elementarflächenstück \mathfrak{F} des \mathfrak{R}^3 läßt sich durch eine s -Abbildung des \mathfrak{R}^3 auf sich in ein 2-Simplex überführen.

Beweis. F sei das Flächenstück \mathfrak{F} mit einer simplizialen Zerlegung und $e_1 \dots e_n$ seien die 2-Simplexe von F . Wir führen den Beweis durch Induktion nach n . Ist $n=1$, so ist \mathfrak{F} bereits ein 2-Simplex. Ist $n \geq 2$, so tritt nach Hilfssatz I einer der beiden Fälle ein:

1. Es gibt ein 2-Simplex $e = (ABC)$ von F , welches mit dem Rande von \mathfrak{F} zwei Seiten gemeinsam hat, etwa AC und CB . Bezeichnet dann \mathfrak{F}_1 die Menge aller Punkte, die den 2-Simplexen von $F + e \pmod{2}$ angehören, so ist \mathfrak{F}_1 wieder ein Elementarflächenstück und besteht aus einem 2-Simplex weniger als \mathfrak{F} . e' sei dasjenige 2-Simplex von F , welches mit e die Seite AB gemeinsam hat. Offenbar gibt es eine s -Abbildung des \mathfrak{R}^3 , welche das Flächenstück $e + e'$ in ein 2-Simplex überführt. Daraus folgt nach § 3 Beispiel IV (S. 12), daß es eine s -Abbildung des \mathfrak{R}^3 gibt, welche \mathfrak{F} in \mathfrak{F}_1 überführt. Damit ist der erste Fall erledigt.

2. Es gibt ein 2-Simplex $e = (ABC)$ von F , welches mit dem Rande von \mathfrak{F} genau eine Seite, etwa AB , gemeinsam hat. Dann

¹ Wir verstehen unter einem Simplexstern im Gegensatz zu SEIFERT-THRELFALL [4] einen Komplex und nicht einen *simplizialen* Komplex.

ist $\mathfrak{F}_1 \dagger$ wieder ein Elementarflächenstück. $\mathfrak{S}t$ sei der Simplexstern, der von allen mit C inzidenten 2-Simplexen von F gebildet wird. $\mathfrak{S}t$ läßt sich nach Hilfssatz II durch eine s -Abbildung des \mathfrak{R}^3 in ein 2-Simplex überführen. Daraus folgt nach § 3 Beispiel IV (S. 12), daß es eine s -Abbildung des \mathfrak{R}^3 gibt, welche \mathfrak{F} in \mathfrak{F}_1 überführt. Damit ist alles bewiesen.

Satz II. *Eine gegebene s -Abbildung ψ eines Elementarflächenstückes \mathfrak{F}_1 auf ein anderes \mathfrak{F}_2 des \mathfrak{R}^3 läßt sich zur einer s -Abbildung des \mathfrak{R}^3 auf sich erweitern.*

Beweis. Ist e ein 2-Simplex, so gibt es nach Satz I eine s -Abbildung φ_1 (bzw. φ_2) des \mathfrak{R}^3 , welche \mathfrak{F}_1 (bzw. \mathfrak{F}_2) in e überführt. $\varphi_2 \psi \varphi_1^{-1}$ ist eine semilineare Selbstabbildung von e und läßt sich als solche offenbar zu einer s -Abbildung φ des \mathfrak{R}^3 ergänzen. Dann ist $\varphi_2^{-1} \varphi \varphi_1$ die verlangte Abbildung.

Aus Satz I, § 3 Satz II (S. 13) und § 3 Korollar zu Satz III (S. 15) folgt

Satz III. *Ein Elementarflächenstück auf dem Rande \mathfrak{S}^3 eines 4-Simplexes läßt sich durch eine s -Abbildung von \mathfrak{S}^3 auf sich in ein 2-Simplex überführen.*

Beispiel zu Satz II. Es sei \mathfrak{G} eine geschlossene Fläche des \mathfrak{R}^3 und t ein 1-Element auf \mathfrak{G} . \mathfrak{F}_1 und \mathfrak{F}_2 seien zwei Elementarflächenstücke, welche das 1-Element t auf ihrem Rande enthalten und abgesehen vom 1-Element t im Innern von \mathfrak{G} liegen. Dann gibt es eine s -Abbildung des \mathfrak{R}^3 , welche \mathfrak{F}_1 in \mathfrak{F}_2 überführt und auf \mathfrak{G} die Identität ist.

Beweis. A. Wir nehmen zunächst an, daß die Flächenstücke \mathfrak{F}_1 und \mathfrak{F}_2 nur das 1-Element t zum Durchschnitt haben. Ist $\mathfrak{A} = ABCD$ ein Quadrat, so gibt es nach § 2 Satz II (S. 7) und § 4 Satz III (S. 17) eine s -Abbildung φ des \mathfrak{R}^3 , welche \mathfrak{F}_1 in das Dreieck (ABC) und \mathfrak{F}_2 in das Dreieck (ADC) überführt. Dabei geht das 1-Element t in die Diagonale AC über.

Z sei eine simpliziale Zerlegung des \mathfrak{R}^3 derart, daß φ in allen Simplexen von Z affin ist und daß eine passende simpliziale Zerlegung des Komplexes $\mathfrak{G} + \mathfrak{F}_1 + \mathfrak{F}_2$ nur aus Simplexen von Z besteht.

a) Wir betrachten alle auf \mathfrak{G} liegenden 2-Simplexe von Z , deren Durchschnitt mit t aus mindestens einem mittleren Punkte¹ von t besteht und zeigen, daß deren Bilder auf ein und derselben Seite

† Definition von \mathfrak{F}_1 siehe Fall 1.

¹ Das heißt einem von den Randpunkten verschiedenen Punkte.